

# Avaliação e Desempenho

## Aula 4

### Aulas passadas

- Motivação para avaliação e desempenho

### Aula de hoje

- Revisão de probabilidade
- Eventos e probabilidade
- Independência
- Prob. condicional

# Experimentos Aleatórios

- O que é um experimento aleatório?

**Experimento que nem sempre dá o mesmo resultado!**

## Exemplos:

- Resultado de jogar um dado
- Palavra de busca submetida ao Google
- Tempo de espera no ponto de ônibus

**Vivemos num mundo aleatório...**

# Caracterizando Aleatoriedade

- Como caracterizar um experimento aleatório?
- Ingredientes necessários...
  - Possíveis resultados do experimento
  - “Probabilidade” de ocorrer cada um dos resultados

**Modelos Probabilísticos**

# Modelo Probabilístico

## Componentes

- **Espaço amostral (S):** conjunto de eventos elementares que podem ocorrer a partir de um experimento aleatório
- **Probabilidade de eventos (P):** quantificação da “chance” que cada evento ocorra
- **Conjunto de eventos (E):** subconjunto de eventos que são de nosso interesse

# Exemplo: Dado



- **Espaço amostral (S):** cada uma das faces do dado  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Probabilidade de eventos (P):** chance de que cada face ocorra:  $P(1) = 1/6$ ,  $P(2) = 1/6$ , etc.
- **Conjunto de eventos (E):** números pares,  $E = \{2, 4, 6\}$

# Exemplo: Tempo Esperando um Ônibus



- **Espaço amostral (S):** tempo de espera até a chegada de um ônibus (medido em segundos),  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$
- **Probabilidade de eventos (P):** chance de que uma pessoa espere exatamente  $x$  segundos,  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P(2)$ , etc.
- **Conjunto de eventos (E):** tempo de espera menor que 1 minuto,  $E = \{x \mid x < 60\}$

# O que é Probabilidade?



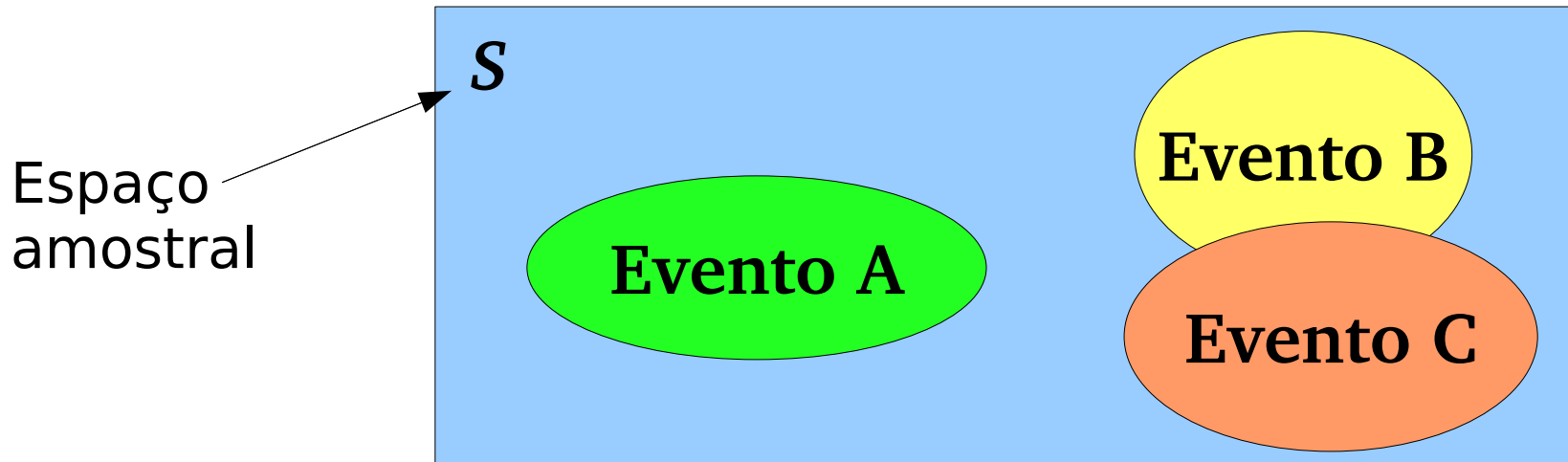
- “Chance de que um evento ocorra”
- Fração de ocorrência ou **frequência relativa**
  - contagem de eventos
  - número de ocorrências dividido por número total de eventos

## Exemplo:

- A frequência relativa de uma das faces de um dado é em torno de  $1/6$

# Álgebra de Eventos

## ■ Diagrama de eventos



## ■ Conjunto de eventos (resultados) elementares

- Ex. evento A, evento B, etc

- Evento **ocorre** quando um de seus elementos é o resultado do experimento aleatório

## ■ Operações de união, interseção e complemento



# Exemplo: Dois dados



- Considere dois dados jogados simultaneamente

- Qual é o espaço amostral?

$$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \dots \}$$

- Evento A : os dois dados são pares

$$A = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), \\ (6, 2), (6, 4), (6, 6) \}$$

- Evento B : soma é menor que 7

$$B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), \\ (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1) \}$$

# Exemplo: Dois dados



- Evento A : os dois dados são pares

$$A = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \}$$

- Evento B : soma é menor que 7

$$B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1) \}$$

- Evento C : soma é menor que 7 e ambos dados são pares

$$A \cap B = \{ (2, 2), (2, 4), (4, 2) \}$$

# Exclusão Mútua

- Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos se

$$A \cap B = \emptyset$$

conjunto  
vazio

Exemplos?

- Evento A: os dois dados são pares
- Evento B: os dois dados são ímpares

# Axiomas de Probabilidade

- (A1): para cada evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$
- (A2):  $P(S) = 1$ , onde  $S$  é o espaço amostral
- (A3): se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- Consequências?
  - Teoria de Probabilidade!

# Exemplo de Confiabilidade

- Sistema com 2 discos idênticos
- Sistema operacional quando ao menos 1 disco está funcionando
- Qual probabilidade do sistema estar operacional?

## Modelo

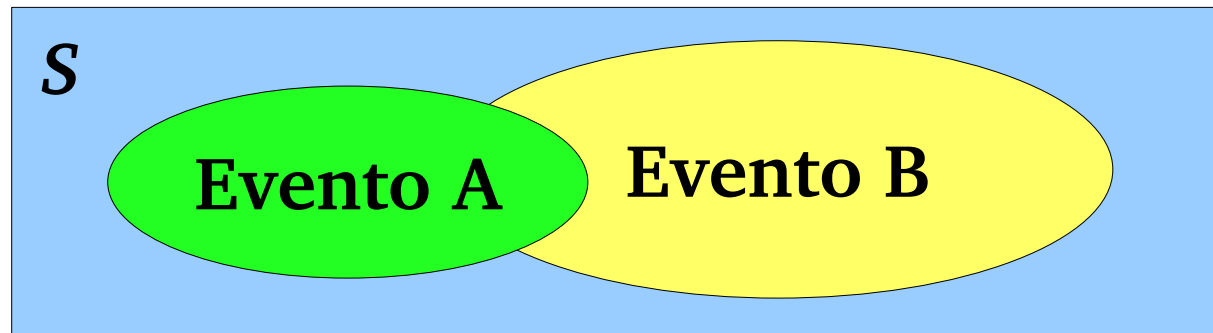
- $p$ : prob. de um disco falhar
- Falhas ocorrem de forma *independente*

# Exemplo de Confiabilidade

- Qual é o experimento aleatório?
- Qual é o espaço amostral?
  - estado do disco 1, estado do disco 2
  - f = disco falhou, o = disco operacional
  - $S = \{ (f, f), (f, o), (o, f), (o, o) \}$
- Qual é o conjunto de eventos de interesse?  
(ao menos 1 disco está operacional)
  - $A = \{ (f, o), (o, f), (o, o) \}$
- Qual é a probabilidade de ocorrer o evento de interesse?

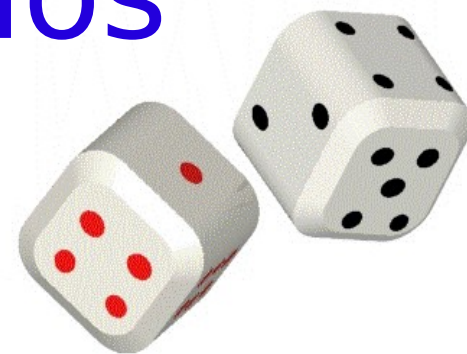
# Probabilidade Condicional

- Relacionamento entre a ocorrência de um evento e outros eventos



- Qual a probabilidade do evento A *dado* que o evento B ocorreu?
  - Dado que o resultado do experimento aleatório é elemento de B, qual a probabilidade deste ser também elemento de A?
  - Espaço amostral passa a ser o evento B

# Exemplo: Dois dados



- Evento A : os dois dados são pares
- Evento B : soma é menor que 7

**Dado o evento B, qual a probabilidade do evento A?**

$A = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \}$

$B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1) \}$



# Probabilidade Condicional

## ■ Definição

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Probabilidade  
de A dado B



## ■ Caso A e B sejam mutuamente exclusivos?

# Eventos Independentes

- Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos sobre o mesmo espaço amostral  $S$
- $A$  e  $B$  são independentes se

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$

- Note que se  $A$  e  $B$  são independentes, então

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A]P[B]}{P[B]} = P[A]$$

- 2 eventos são independentes se a ocorrência de um não altera a probabilidade do outro

# Exemplo: Dois dados

- Evento A : os dois dados são pares
- Evento B : soma dos dados é menor que 7

**A e B são independentes?**

$$A = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \}$$

$$B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1) \}$$

$$A \cap B = \{ (2, 2), (2, 4), (4, 2) \}$$

$$P[A \cap B] = 3/36 = 1/12 \quad P[A] = 9/36 = 1/4, \quad P[B] = 15/36 = 5/12$$

$$P[A \cap B] \neq P[A]P[B] \quad \longleftarrow \text{A e B não são independentes!}$$

# Eventos: Mutuamente Exclusivos x Independentes

- Experimento Aleatório: Jogar um dado e uma moeda  
 $S = \{(1, \text{Ca}), (1, \text{Co}), (2, \text{Ca}), (2, \text{Co}), (3, \text{Ca}), (3, \text{Co}), (4, \text{Ca}), (4, \text{Co}), (5, \text{Ca}), (5, \text{Co}), (6, \text{Ca}), (6, \text{Co})\}$
- Evento A: resultado da moeda é cara
- Evento B: resultado da moeda é coroa
- Eventos A e B são independentes ou mutuamente exclusivos?

$$A \cap B = \emptyset \longrightarrow \text{A e B são mutuamente exclusivos!}$$

# Eventos: Mutuamente Exclusivos x Independentes

- Evento A: resultado do dado é ímpar
- Evento B: resultado da moeda é cara
- Eventos A e B são independentes ou mutuamente exclusivos?

$S = \{(1, Ca), (1, Co), (2, Ca), (2, Co), (3, Ca), (3, Co), (4, Ca), (4, Co), (5, Ca), (5, Co), (6, Ca), (6, Co)\}$

$$A \cap B = \{(1, Ca), (3, Ca), (5, Ca)\}$$

$$P[A \cap B] = 3/12 = 1/4 \quad P[A] = 1/2, \quad P[B] = 1/2$$

- $P[A \cap B] = P[A]P[B] = 1/4$  ← A e B são independentes!

# Eventos: Mutuamente Exclusivos x Independentes

■ Evento A: resultado do dado é maior do que 2

■ Evento B: resultado da moeda é cara

$S = \{(1, Ca), (1, Co), (2, Ca), (2, Co), (3, Ca), (3, Co), (4, Ca), (4, Co), (5, Ca), (5, Co), (6, Ca), (6, Co)\}$

$A \cap B = \{(3, Ca), (4, Ca), (5, Ca), (6, Ca)\}$

$P[A \cap B] = 4/12 = 1/3$        $P[A] = 8/12 = 2/3$ ,  $P[B] = 1/2$

■  $P[A \cap B] = 1/3 \neq P[A] P[B] = 2/6$

↖  
A e B são  
independentes!

# Condicionamento

- Relacionar eventos para calcular probabilidade
- Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos, temos que

$$\begin{aligned} P[A] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] && \leftarrow \text{definição dos conjuntos} \\ &= P[A \cap B] + P[A \cap \bar{B}] && \leftarrow \text{mutuamente exclusivos} \\ &= P[A|B]P[B] + P[A|\bar{B}]P[\bar{B}] && \leftarrow \text{Definição de probabilidade condicional} \end{aligned}$$

- Conhecendo  $P[B]$  e a condicional  $P[A|B]$ , podemos calcular  $P[A]$

# Exemplo

- Técnica (imperfeita) para acusar defeitos em processadores
  - 95% verdadeiro positivo ← teste acusa defeito quando processador está defeituoso
  - 2% falso positivo ← teste acusa defeito quando processador está ok
- 1% dos processadores possuem defeitos
- Qual a probabilidade de um processador ser defeituoso dado que o teste foi positivo?

## Eventos

- $D$  : processador defeituoso
- $T$  : resultado do teste é positivo



# Exemplo (continuação)

- $D$  : processador defeituoso
- $T$  : resultado do teste é positivo
- Pergunta:  $P[D|T]$  ?

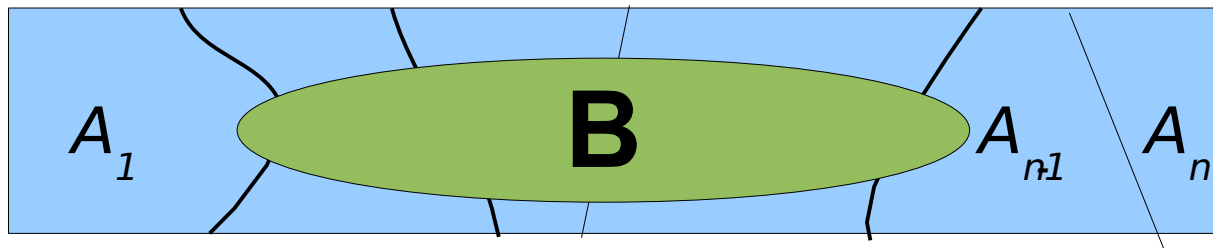
$$P[D]=0.01 \quad P[T|D]=0.95 \quad P[T|\bar{D}]=0.02$$

$$P[D|T] = \frac{P[D \cap T]}{P[T]} = \frac{P[T|D]P[D]}{P[T]}$$

$$P[T] = P[T|D]P[D] + P[T|\bar{D}]P[\bar{D}]$$

# Teorema da Probabilidade Total

- Generalização do conceito
- Seja  $A_i$  ( $i=1,\dots,n$ ) uma *partição* do espaço amostral
  - mutuamente exclusivos, união é igual ao espaço amostral



- Considere o evento B
  - probabilidade de B ocorrer (em função de  $A_i$ )?

$$P[B] = \sum_{i=1}^{i=n} P[B|A_i]P[A_i] \quad \leftarrow \text{Teorema da Probabilidade Total}$$