# Avaliação e Desempenho
# Aula 5

**Aula passada**

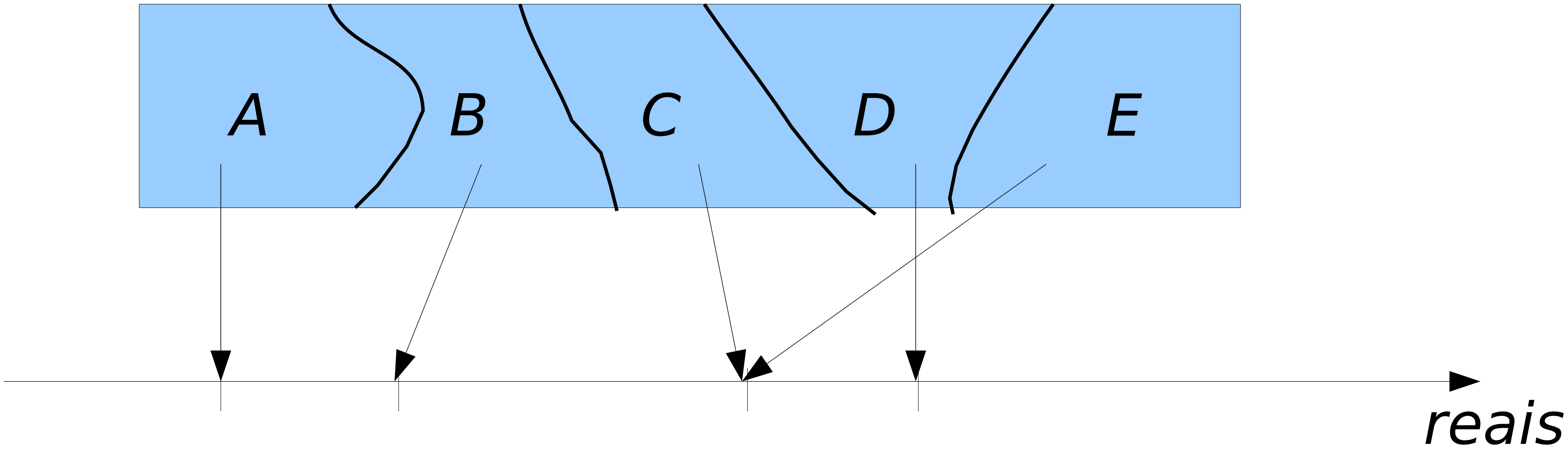
- Revisão de probabilidade
- Eventos e probabilidade
- Independendência
- Prob. condicional

**Aula de hoje**

- Variáveis aleatórias discretas e contínuas
- PMF, CDF e função densidade
- Exemplos de v. a.
- Esperança, Variância

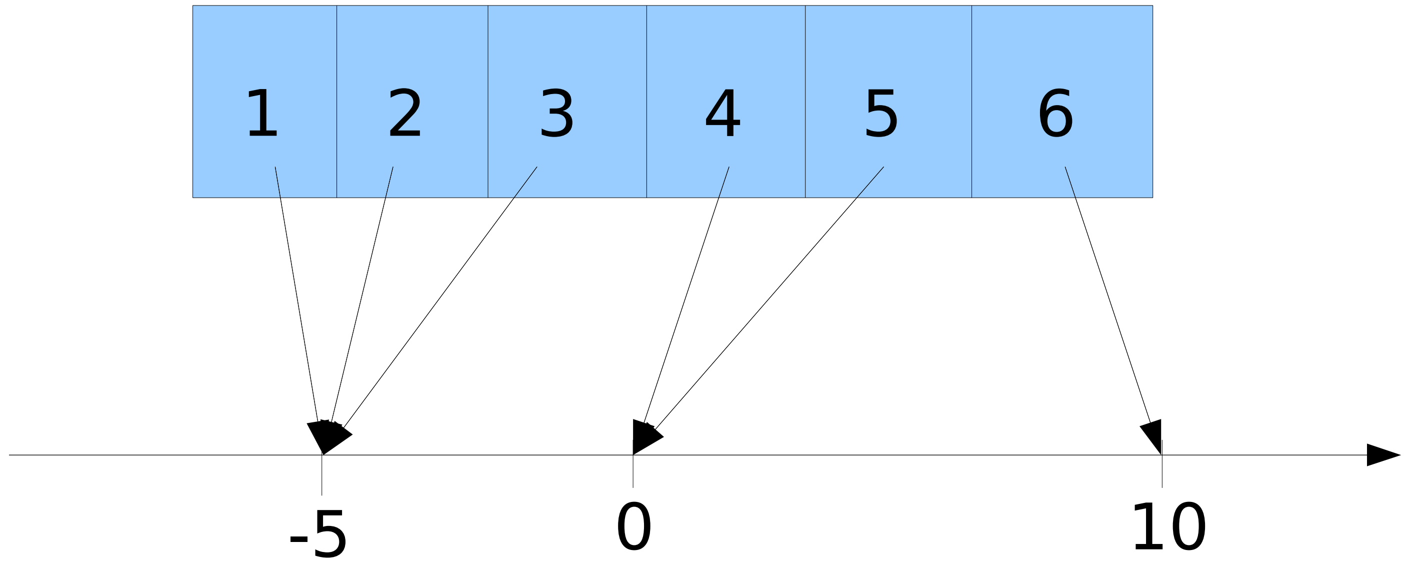
# Variáveis Aleatórias

- Necessidade de expressar eventos de forma precisa
- Interesse não no resultado aleatório, mas numa *função* do resultado
- **Idéia:** Mapear eventos em números reais!



# Exemplo: 1 dado

- Considere um dado
- Ganha 10 se o resultado é 6, zero se o resultado é 4 ou 5, e perde 5 se o resultado é 1, 2 ou 3



# Definição de V.A.

- Uma variável aleatória *X* é uma função sobre um espaço amostral *S* que associa um número real a cada elemento de *S*

$$X : S \rightarrow \Re$$

- v.a. é uma ***função*** (e não uma variável)
- imagem de *X* é o espaço amostral (discreto ou contínuo)
- função não precisa ser bijetora (um-para-um)

# Exemplo: 2 dados

- Considere dois dados (vermelho e preto)
- Espaço amostral:

**S = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), ... }**

- Seja $X$ uma v.a. que representa a soma dos dois dados

$$X((i, j)) = i + j$$

- Inversa de $X$
  - eventos que levam a um certo valor de $X$
  - $X = 4$ : {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}

# Função de probabilidade de massa (pmf)

- Associar probabilidade a valores de uma v.a.
- Seja X uma v.a. (discreta)
- Qual a probabilidade de $X = x$?

$$\{ s | X(s) = x \}$$

Conjunto de eventos elementares que são mapeados no valor x

$$p_X(x) = P[X = x] = P[\{ s | X(s) = x \}] = \sum_{X(s)=x} P[s]$$

notação de pmf (probability mass function)

# Exemplo: 2 dados

- Seja $X$ uma v.a. que representa a soma de dois dados
- Defina a pmf de $X$

$$p_X(x) = P[X = x]$$

- Qual é o domínio de $X$ (valores que $X$ pode assumir)?

$p_X(2) = P[X=2]$ = 1/36 → X=2 : {(1,1)}

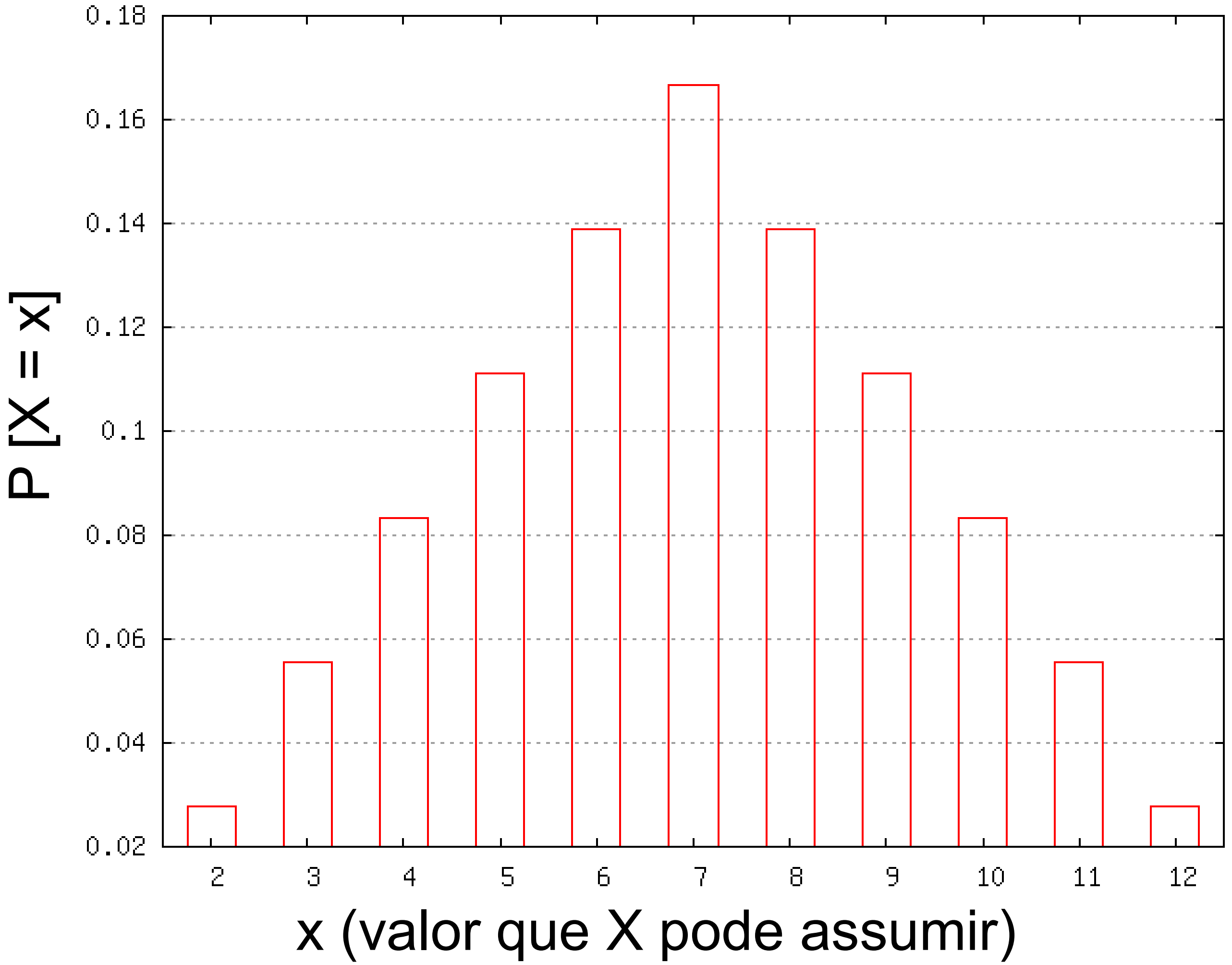
$p_X(3) = P[X=3]$ = 2/36 → X=3 : {(1,2), (2,1)}

$p_X(4) = P[X=4]$ = 3/36 → X=4 : {(1,3), (2,2), (3,1)}

. . .

# Exemplo: 2 dados

- pmf, graficamente



# Função de distribuição cumulativa (cdf)

- Probabilidade *cumulativa* (ao invés de pontual)
- Dada v.a. $X$, temos

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = P[\{s | X(s) \leqslant x\}] = \sum_{X(s) \leqslant x} P[s]$$

notação da cdf (cumulative distribution function)

- $F_X(x)$ é não decrescente
- Limite quando $x$ tende a infinito é 1

# Exemplo: 2 dados

- Seja $X$ uma v.a. que representa a soma de dois dados
- Defina a cdf de $X$

$$F_X(x) = P[X \leqslant x]$$

$F_X(2) = P[X \leqslant 2] = 1/36$ ⟶ X=2 : {(1,1)}

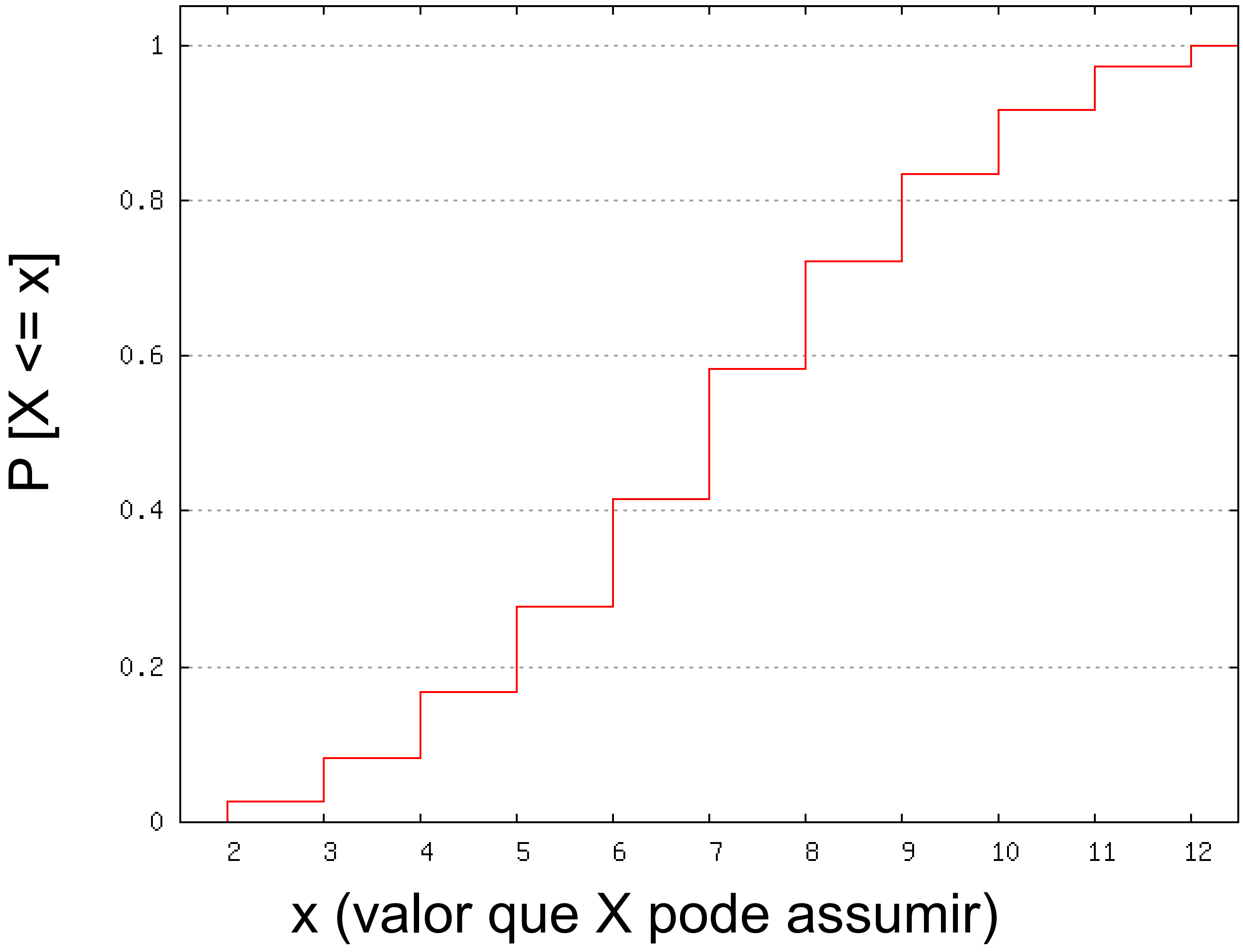
$F_X(3) = P[X \leqslant 3] = 3/36$ ⟶ X=3 : {(1,1), (1,2), (2,1)}

$F_X(4) = P[X \leqslant 4] = 6/36$ ⟶ X=4 : {(1,1), ..., (1,3)}

. . .

# Exemplo: 2 dados

- cdf, graficamente



# Espaço Amostral não Contável

- Espaço amostral é contínuo (não contável)
  - não podemos *enumerar* o espaço
  - Exemplo de espaço amostral contínuo?
- Exemplo de experimento aleatório?
  - medir intervalo de tempo com precisão infinita!
- Associar probabilidade a cada possível resultado?
  - Não! Um dado resultado irá possuir probabilidade zero!
- Idéia: Associar probabilidade a conjuntos de resultados
  - ex. intervalo de tempo entre 1 e 1.1 segundos

# Variável Aleatória Contínua

- Aplica-se quando espaço amostral não é contável
- Mesma idéia da v.a. discreta
  - mapear o espaço amostral nos números reais

$$X : S \to \Re$$

- Exemplo de experimento aleatório
  - tempo até uma lâmpada queimar (medido com precisão infinita)
  - $X$ é uma v.a. que indica exatamente este tempo

# Variável Aleatória Contínua

- Função de probabilidade de massa não faz sentido
  - probabilidade de um elemento do espaço amostral é zero

- Função de distribuição cumulativa **faz** sentido
  - probabilidade de uma **região** do espaço mapeado
  - ex. prob. da lâmpada queimar em menos de 1 dia

$$F_X(x) = P[X \leqslant x]$$

# Função de Densidade de Probabilidade (pdf)

- Aplicada a v.a. contínuas (facilita os cálculos)
- Define probabilidade da v.a. através de integrais

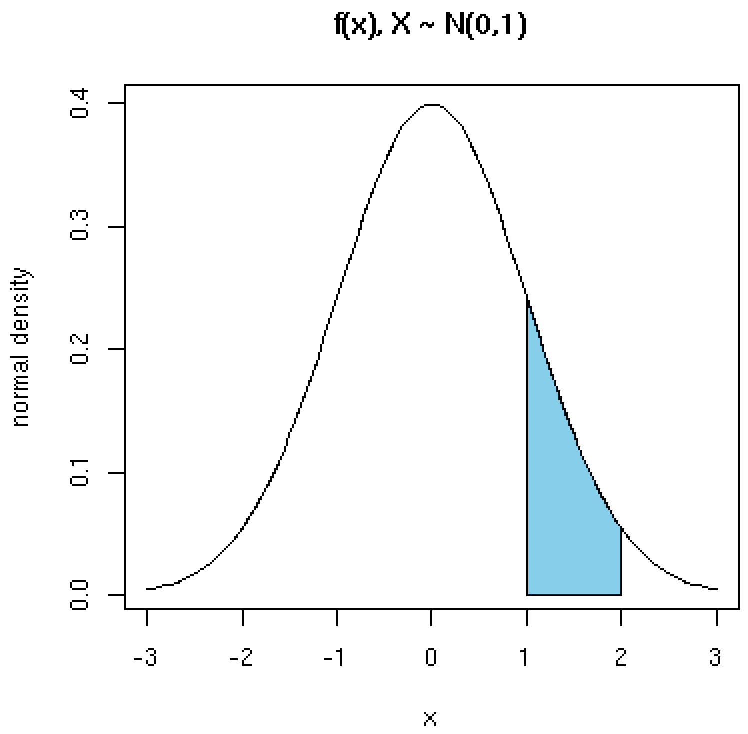
$$f_X(x) \longleftarrow$$ função de densidade da v.a. $X$

$$P[a \leqslant X \leqslant b] = \int_{x=a}^{x=b} f_X(x)\,dx$$

- Relação com cdf (função cumulativa)

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x) \longleftarrow$$ pdf é a derivada da cdf

# Função de Densidade de Probabilidade (pdf)




$$P[1 \leqslant X \leqslant 2] = \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx$$

# Distribuições Importantes

- v.a. discretas
  - Bernoulli
  - Binomial
  - Geométrica
  - Poisson
- v.a. contínuas
  - Uniforme
  - Exponencial
  - Erlang
  - Normal
- Usadas para *modelar* eventos que ocorrem na natureza
  - Representam v.a. que iremos usar
- Relativamente fáceis de manipular

# Bernoulli

- Somente dois eventos podem ocorrer
  - cara ou coroa, sucesso ou falha, par ou ímpar, etc.
- v.a. binária (evento 0 ou evento 1)
- Parâmetro *p*, ocorrência de um dos eventos)
- pmf: $p_X(0) = 1 - p \qquad p_X(1) = p$

# Binomial

- Contagem de eventos de Bernoulli
  - eventos independentes
- Número de *sucessos* dado *N* experimentos
- Dois parâmetros
  - *p*: prob. de ocorrência do evento (sucesso)
  - *N*: número de experimentos
- pmf:

$$p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Número de vezes que exatamente k eventos podem ocorrer

Prob. que exatamente k eventos ocorram

# Geométrica

- Sequência de eventos de Bernoulli até que ocorra um sucesso
- Parâmetros
  - $p$: prob. de ocorrência do evento (sucesso)
  - $N$: número de experimentos
- pmf: $$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$$

Prob. de um evento de sucesso

Prob. de exatamente k-1 eventos de falha

# Poisson

- Número de eventos que ocorrem em um determinado intervalo de tempo
- Parâmetros
  - $t$: intervalo de tempo
  - $\lambda$: taxa média de ocorrência de eventos por unidade de tempo
- pmf:

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

# Exemplo com Poisson

- Chegada de chamadas a um call center segue a distribuição de Poisson
- Taxa média de chegada é de 3 chamadas por minuto
- Qual a probabilidade de não haver nenhuma chamada em 1 minuto?
- Qual a probabilidade de termos mais de 100 chamadas em 1 hora?

# Exemplo com Poisson

- Qual a probabilidade de não haver nenhuma chamada em 1 minuto?
- $\lambda = 3$ chamadas /minuto

$$p_X(0) = \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} = e^{-3}$$

# Exemplo com Poisson

- Qual a probabilidade de termos mais de 100 chamadas em 1 hora?
- $\lambda = 3$ chamadas /minuto

$$1 - P[X \leq 100] = 1 - F_X(100)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{k=100} \frac{e^{-3*60}(3*60)^k}{k!}$$

# Uniforme

- Valores podem ocorrer com a mesma probabilidade
- Parâmetros
  - $[a, b]$ : intervalo onde v.a. pode ocorrer
- cdf:

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Onde ocorre o evento (em relação ao começo do intervalo)

Tamanho do intervalo

# Exponencial

- Tempo até que um evento ocorra
- Relacionada com Poisson (tempo entre eventos)
- Parâmetros
  - $\lambda$: taxa de ocorrência de eventos
- cdf:

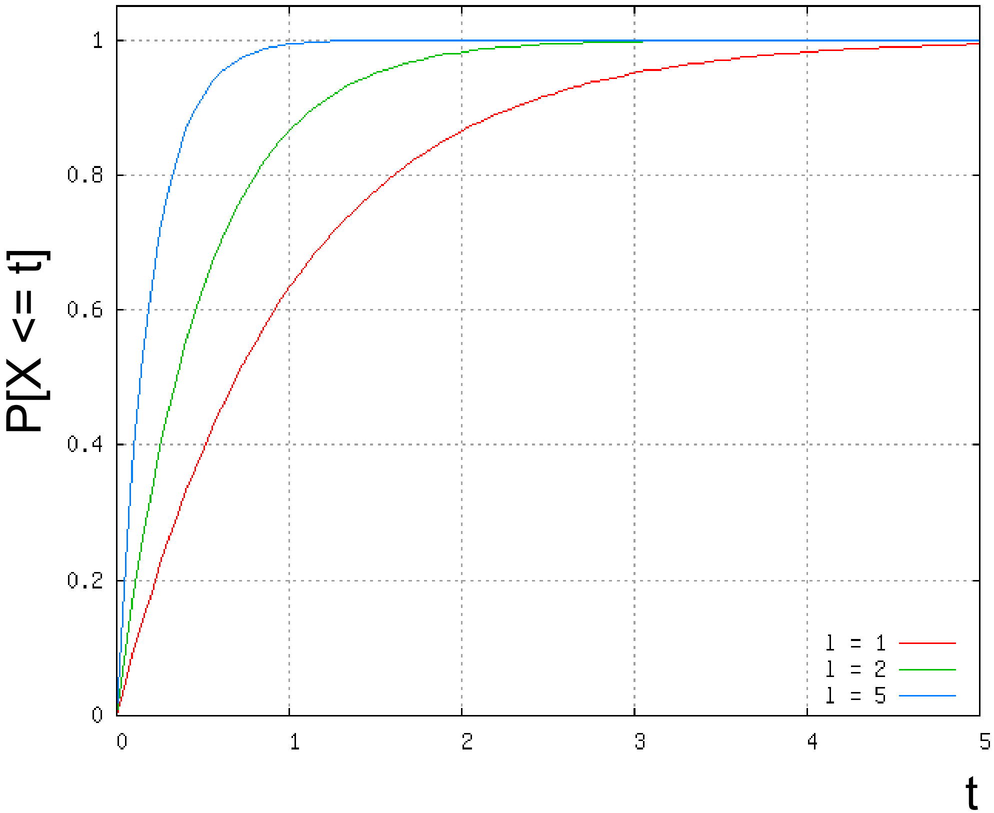
$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- pdf:

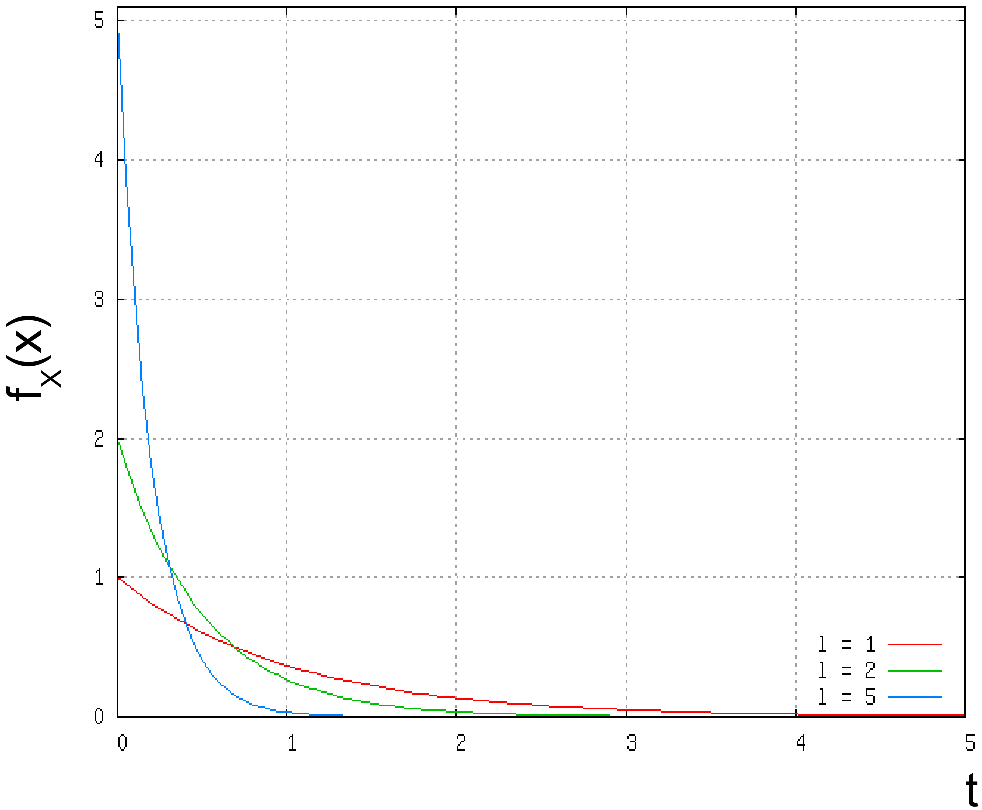
$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

# Exponencial

- cdf




- pdf




- diferentes valores do parâmetro $\lambda$

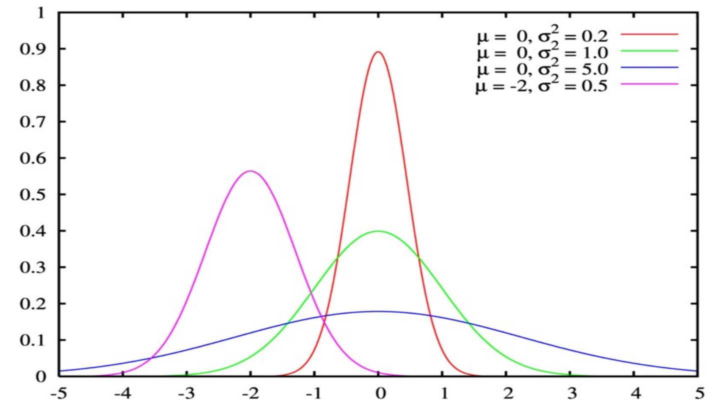
# Erlang

- Tempo até que um evento ocorra
- Sequência de v.a. Exponenciais
- Parâmetro
  - $\lambda$: taxa de ocorrência de eventos
  - $r$: número de estágios (de v.a. exponenciais)
- CDF:

$$F_X(t) = 1 - \sum_{k=0,\ldots,r-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

# Normal

- Distribuição fundamental em estatística
  - resultado do teorema do limite central
- Aplicada a muitos fenômenos físicos
- Parâmetros
  - *u*: média
  - *s*: desvio padrão




- Normal padrão (média 0, desvio padrão 1)

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u^2/2)}\, du$$

- Não possui forma fechada (consultar tabela)

# Valor Esperado, Média, Esperança

- Variável aleatória discreta

$$E[X] = \sum_k x_k p_X(x_k)$$

- Variável aleatória contínua

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

# Variância

- Variável aleatória discreta ou contínua

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

- Segundo momento v.a. contínua

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

# Propriedades da Média

- Linearidade:

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$

- Produto:

$$E[XY]=E[X]E[Y],$$

$$se\ X\ e\ Y\ são\ independentes.$$

# Propriedade da Variância

- Soma de variância de duas v.a.

$$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y],$$
$$se\ X\ e\ Y\ são\ independentes.$$

- Se X e Y não são independentes:

$$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]+2\mathrm{Cov}(X,Y),$$
$$onde$$
$$Cov(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$