Estatística e Modelos Probabilísticos - COE241

Aula de hoje

Propriedades da média e da variância

Covariância, coeficiente de correlação

Esperança da soma de variáveis aleatórias

- If $Z=X+Y$, then
  - $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$
  - $\boxed{\text{For the above to hold, } X, Y \text{ need not be independent}}$
- More generally, Linearity property of expectation (no need to assume independence)

$$E\left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

Esperança do produto de variáveis aleatórias

.

- If $Z=XY$, then
  - $E[XY] = E[X]E[Y]$ (if X, Y are mutually independent)
- More generally

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i] \quad (X_i \text{ mutually independent})$$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} \phi_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E[\phi_i(X_i)] \quad (X_i \text{ mutually independent})$$

Variância: outra expressão

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - E\left[2XE[X]\right] + (E[X])^2 \\
&= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2
\end{aligned}$$

(noting that $E[X]$ is a constant). Thus

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

Variância: outra expressão

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

This formula for $Var[X]$ is usually preferred over the original definition:

$$\mathrm{Var}[X] = \mu_2 = \sigma_X^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - E[X])^2\, p(x_i) & \text{if } X \text{ is discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2\, f(x)dx & \text{if } X \text{ is continuous} \end{cases}$$

Variância da soma de variáveis aleatórias

.

- $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

$\left(\text{If } X,\ Y \text{ independent rv's}\right)$

Variância da soma de variáveis aleatórias

$$E[((X-E[X])+(Y-E[Y]))^2]$$

$$\begin{aligned}
Var[X+Y] &= E[((X+Y)-E[X+Y])^2] \\
&= E[((X+Y)-E[X]-E[Y])^2] \\
&= E[(X-E[X])^2+(Y-E[Y])^2+2(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]+2E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= Var[X]+Var[Y]+2Cov(X,Y) \\
\text{where} & \\
Cov(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= E[XY-YE[X]-XE[Y]+E[X]E[Y]] \\
&= E[XY]-E[X]E[Y]=0 \text{ (if } X \text{ and } Y \text{ are independent)}
\end{aligned}$$

Variância da soma de variáveis aleatórias

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] \text{ (if } X_i\text{'s independent)}$$

Dependência entre variáveis aleatórias

- $\mathrm{Cov}(X,Y) \stackrel{def}{=} E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ then X and Y are uncorrelated
- If X, Y independent then $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
- Se Cov(X,Y)=0, não significa que X e Y são independentes
- Covariância expressa a dependência linear

Dependência entre variáveis aleatórias: exemplo

- Seja X v.a. Uniforme (-1,1) e $Y=X^2$, logo Y é dependente de X. Qual o valor de Cov(X,Y) ?

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0$$

- Y é dependente de X, mas X e Y são não correlacionadas.

Coeficiente de Correlação

- (Cross) Correlation Co-efficient:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}, \quad -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$$

$$= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- The closer $\rho\ (X,\ Y)$ is to –1 or 1, the stronger the linear relationship is between X and Y.

Coeficiente de Correlação