

Estatística e Modelos Probabilísticos - COE241

Aula de hoje

Teste de hipótese: variância

Goodness of fit: v.a. discreta

Goodness of fit: v.a. contínua Kolmogorov-Smirnov

Teste a respeito de variância

- Suponha que a hipótese nula seja do tipo $H_0 : \sigma = \sigma_0$, e assumindo amostras de uma população com distribuição Normal (μ, σ_0^2) . Podemos definir a seguinte estatística:

$$X_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

X_{n-1}^2 tem distribuição chi-squared com (n-1) graus de liberdade

- Graus de liberdade: diferença entre número de amostras coletadas e número de parâmetros estimados

Teste a respeito de variância

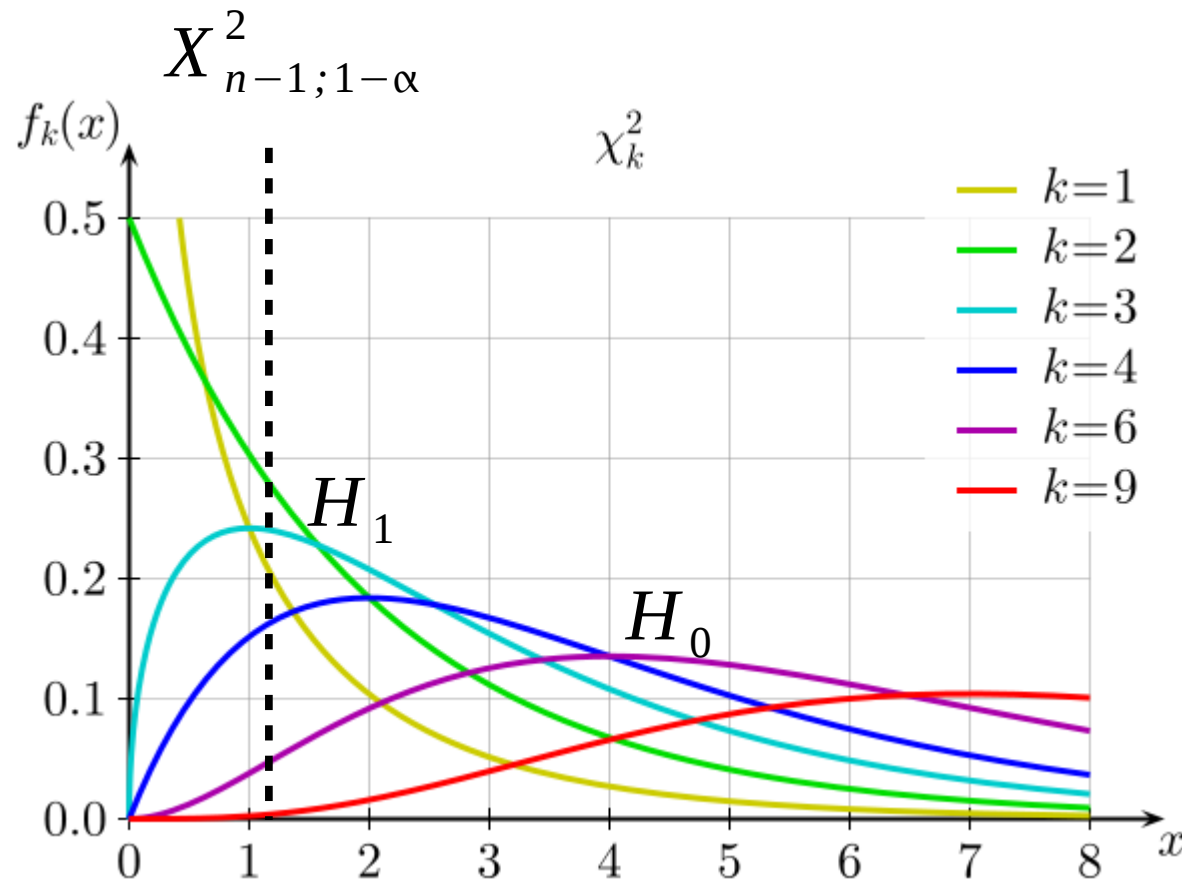
■ Variância da v.a. Chi-square = $2(n-1) = 2k$

■ Considere o teste:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$X_{n-1}^2 < X_{n-1;1-\alpha}^2$$



Teste a respeito de variância

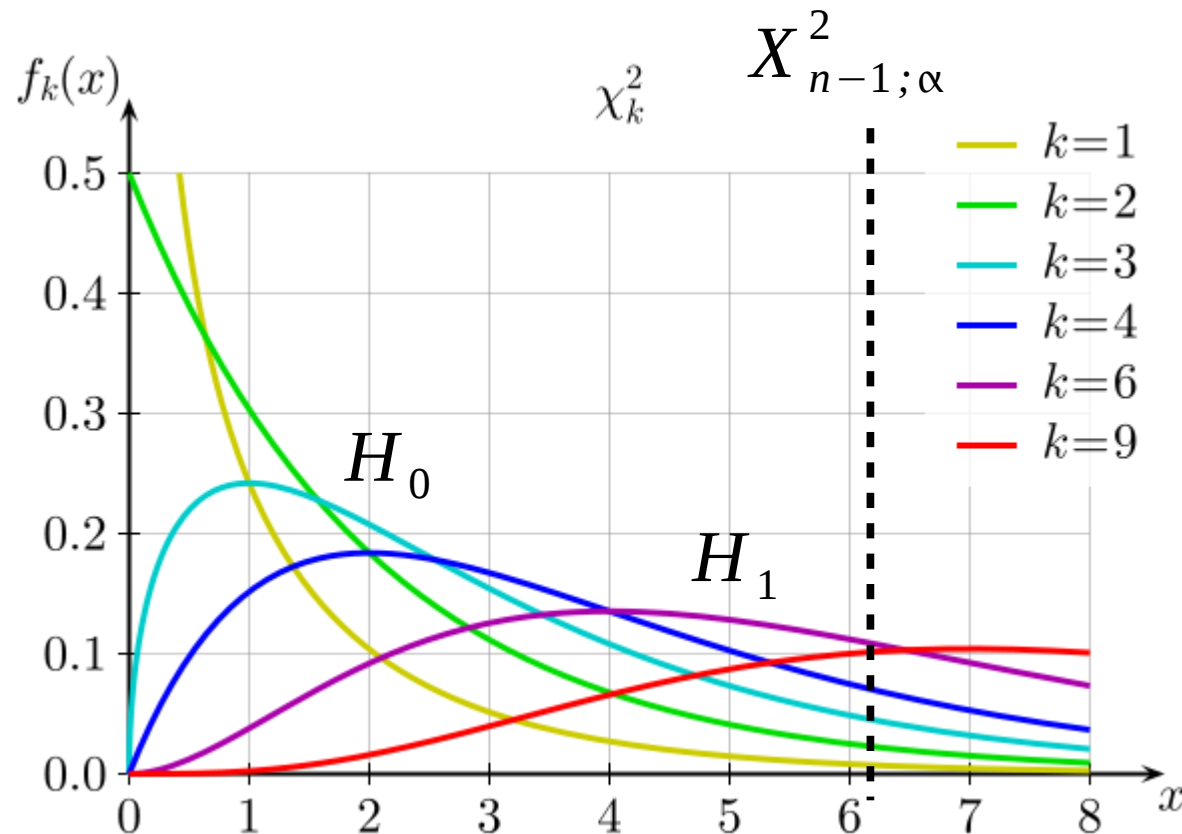
■ Variância da v.a. Chi-square = $2(n-1) = 2k$

■ Considere o teste:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$X_{n-1}^2 > X_{n-1;\alpha}^2$$



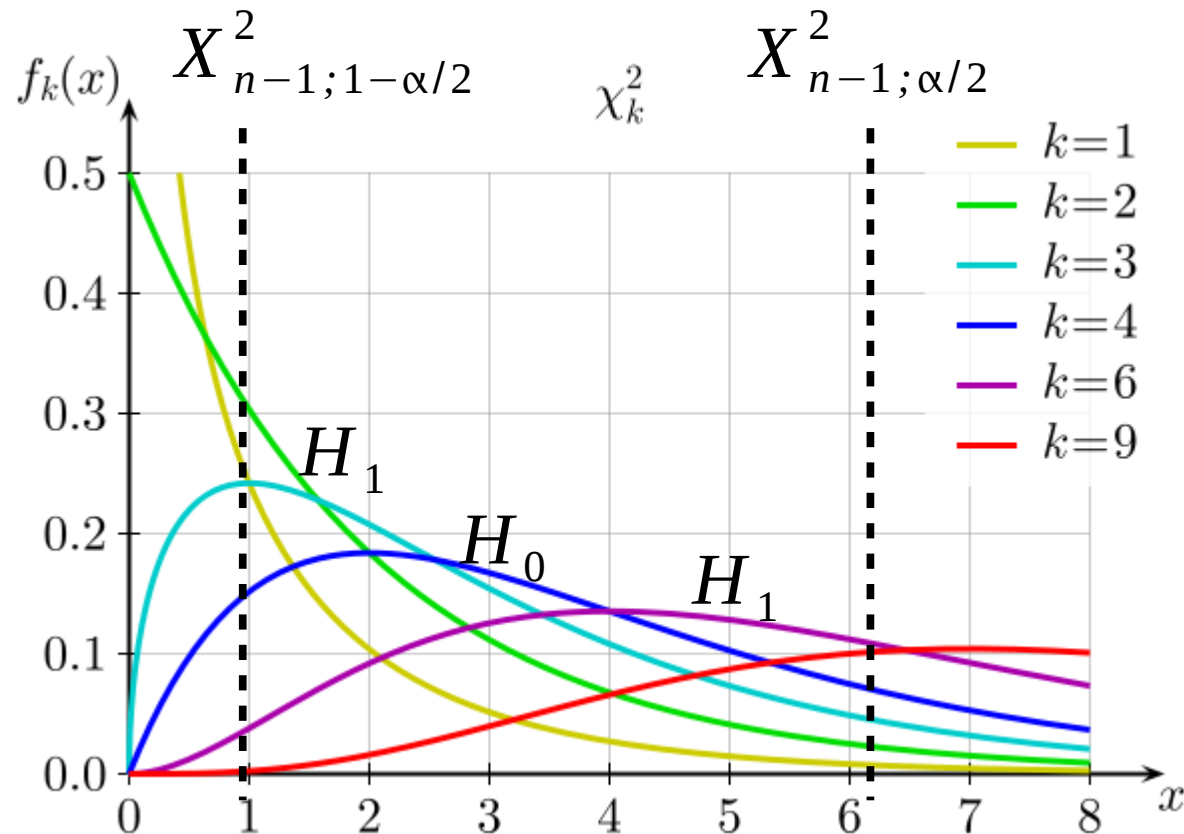
Teste a respeito de variância

■ Variância da v.a. Chi-square = $2(n-1) = 2k$

■ Considere o teste:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$X_{n-1}^2 > X_{n-1;\alpha/2}^2 \quad \text{ou} \\ X_{n-1}^2 < X_{n-1;1-\alpha/2}^2$$



Teste a respeito de variância

■ Exemplo 10.38 do Livro do Trivedi (pg. 713)

Testes para distribuição de probabilidade

- Usado para testar se uma distribuição empírica corresponde a uma determinada distribuição da literatura
- Considere X uma v.a. discreta com pmf $p_X(i)=p_i$
- Hipóteses:

$$H_0: p_i = p_{i_0}, \quad i=0,1,\dots,k-1$$

$$H_1: \text{not } H_0$$

Teste para distribuição de probabilidade (v.a. discreta)

- Considere que são coletadas n observações e que a v.a. N_i representa o número de vezes que a v.a. X assumiu o valor i de um total de n amostras.
- N_i tem distribuição binomial com parâmetros n e p_i .
- $E[N_i] = np_i$ e $\text{Var}[N_i] = np_i(1-p_i)$
- É mostrado que Q possui distribuição chi-square com $(k-1)$ graus de liberdade

$$Q = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \right)$$

Teste para distribuição de probabilidade (v.a. discreta)

- Sob a hipótese $H_0 : p_i = p_{i0}$, a estatística Q pode ser calculada a partir de:

$$X_{k-1}^2 = \sum \left(\frac{(\text{observed} - \text{expected})^2}{\text{expected}} \right)$$

Exemplo de teste v.a. discreta

We generated 1,000 random numbers for normal, double exponential, t with 3 degrees of freedom, and lognormal distributions. In all cases, a chi-square test with $k = 32$ bins was applied to test for normally distributed data. Because the normal distribution has two parameters, $c = 2 + 1 = 3$

The normal random numbers were stored in the variable Y1, the double exponential random numbers were stored in the variable Y2, the t random numbers were stored in the variable Y3, and the lognormal random numbers were stored in the variable Y4.

H_0 : the data are normally distributed

H_a : the data are not normally distributed

Y1 Test statistic: $\chi^2 = 32.256$

Y2 Test statistic: $\chi^2 = 91.776$

Y3 Test statistic: $\chi^2 = 101.488$

Y4 Test statistic: $\chi^2 = 1085.104$

Significance level: $\alpha = 0.05$

Degrees of freedom: $k - c = 32 - 3 = 29$

Critical value: $\chi^2_{1-\alpha, k-c} = 42.557$

Critical region: Reject H_0 if $\chi^2 > 42.557$

Teste confirma hipótese que amostras foram geradas a partir de uma v.a. Normal

Teste rejeita hipótese de que amostras foram geradas a partir de uma v.a. Normal

Exemplo de teste v.a. discreta

- Exercício 10.41 do livro do Trivedi, pag. 716.

Foram coletados dados do número de erros que ocorre em um sistema. O número total de erros observados em 50 semanas foi 95. Queremos saber se podemos representar o número de erros por uma v.a. Poisson.

Exemplo de teste v.a. discreta

$p_{i_0} = P[Y=i]$,
 onde Y é v.a. Poisson $n=50$
 np_{i_0}

i	N_i		
<i>Number of errors (i) in one-week period</i>	<i>Number of one-week periods with i errors</i>	<i>Poisson probabilities</i> $\hat{p}_{i_0}$	<i>Expected frequencies</i> $n\hat{p}_{i_0}$
0	14	0.150	7.50
1	11	0.284	14.20
2	9	0.270	13.50
3	6	0.171	8.55
4	5	0.081	4.05
5+	5	0.044	2.20

Exemplo de teste v.a. discreta

- An estimate of the rate parameter is

$$\hat{\lambda} = \frac{\text{total number of observed errors}}{\text{total number of weeks observed}} = \frac{95}{50} = 1.9 \text{ per week}$$

- The test statistic is then

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum \frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \\ &= \frac{(14 - 7.50)^2}{7.50} + \frac{(11 - 14.20)^2}{14.20} + \frac{(9 - 13.5)^2}{13.5} + \frac{(6 - 8.55)^2}{8.55} \\ &\quad + \frac{(5 - 4.05)^2}{4.05} + \frac{(5 - 2.20)^2}{2.20} \\ &= 5.633 + 0.7211 + 1.5 + 0.7605 + 0.2228 + 3.564 \\ &= 12.401\end{aligned}$$

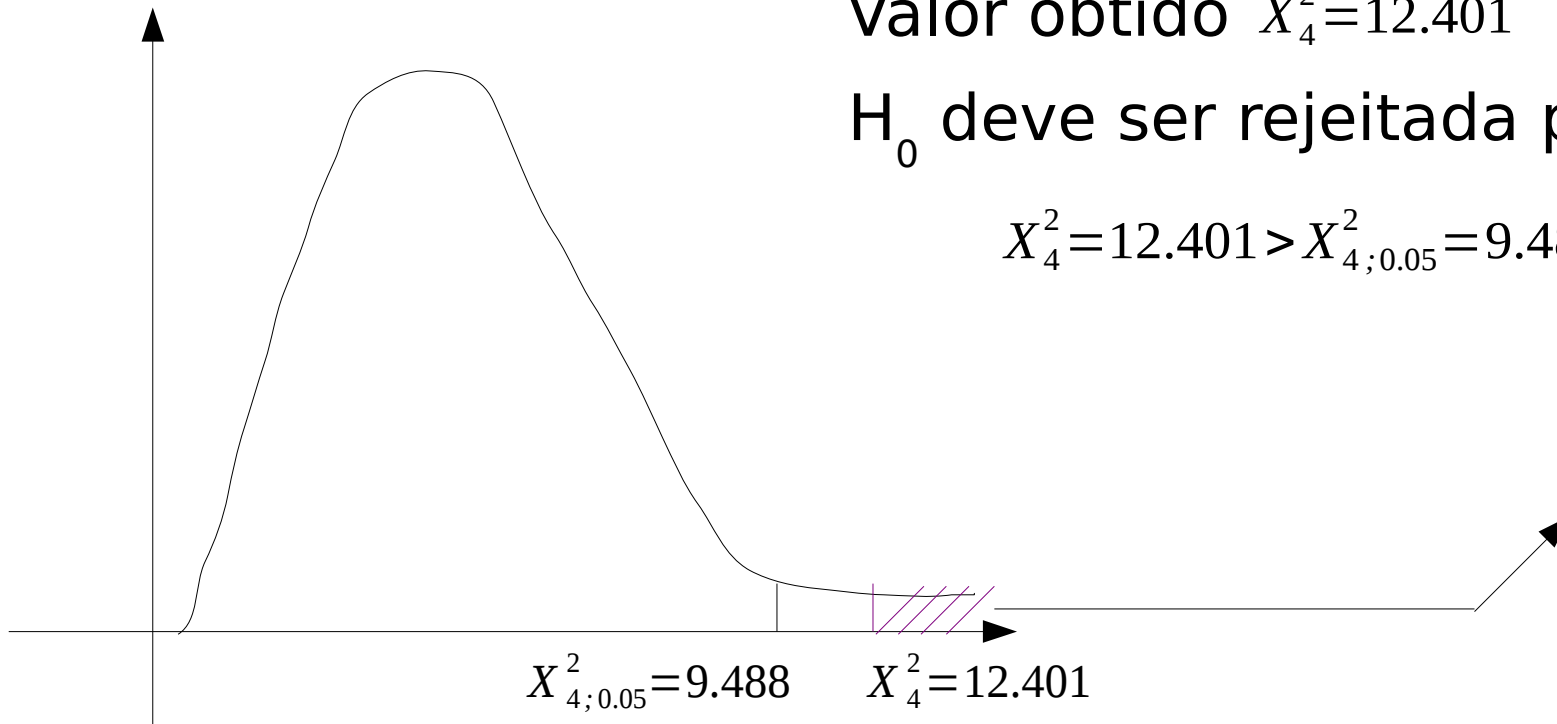
Exemplo de teste v.a. discreta

- A v.a. chi-square possui $k-2$ graus de liberdade. Um grau de liberdade é perdido pois as amostras são usadas para estimar o valor do parâmetro λ da distribuição Poisson.

Valor obtido $X_4^2 = 12.401$

H_0 deve ser rejeitada pois:

$$X_4^2 = 12.401 > X_{4;0.05}^2 = 9.488$$



Teste CDF v.a. contínua

- Suponha X v.a. contínua e queremos testar se X possui determinada função distribuição

$$H_0: \text{para todo } x, F_X(x) = F_0(x)$$

$$H_1: \text{existe um } x \text{ tal que } F_X(x) \neq F_0(x)$$

- Usaremos o teste de Kolmogorov-Smirnov (o teste chi-square poderia ser usado mas perderíamos precisão)

Teste CDF v.a. contínua

- Ordenar em ordem crescente os valores das amostras:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n$$

- Calcular a função distribuição empírica da v.a. X :

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{i}{n}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1, & x_n \leq x \end{cases}$$

Teste CDF v.a. contínua

- A estatística Komolgorov-Smirnov é definida como:

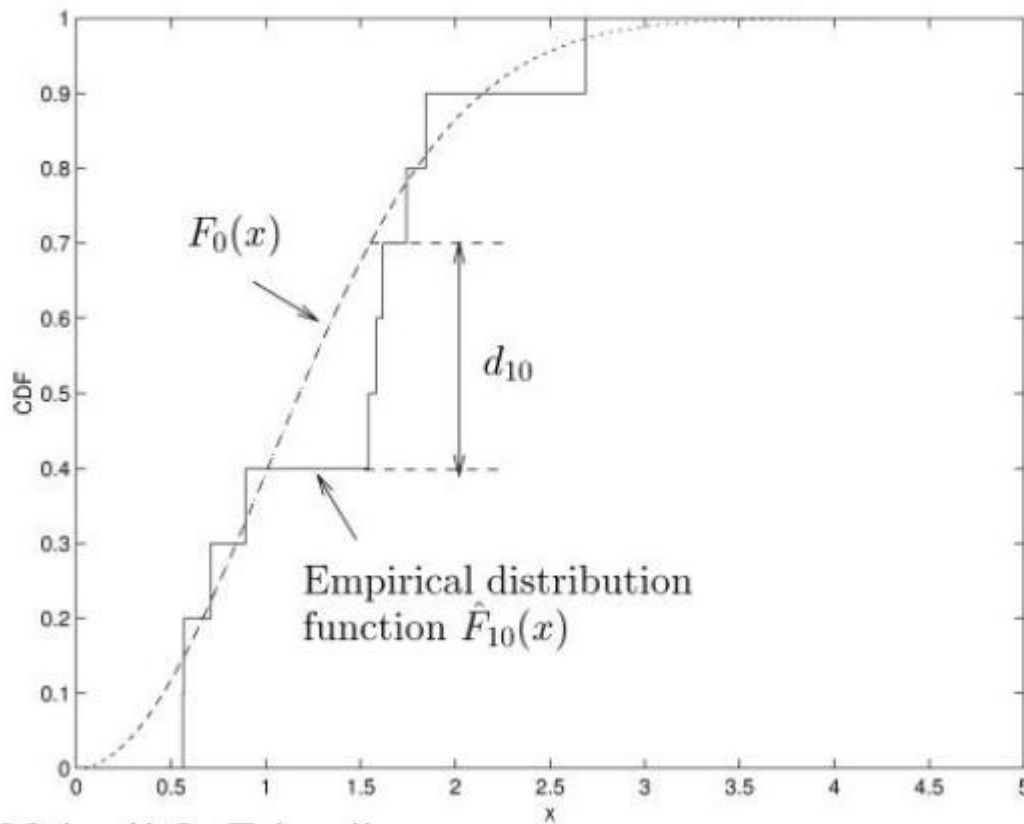
$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F_0(x)|$$

- O uso do supremo ao invés do máximo é porque a função empírica é descontínua.
- Pela definição acima, a diferença entre as funções $|\hat{F}_n(x) - F_0(x)|$ só será avaliada no extremo final do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ pois o valor no intervalo é constante.

Teste CDF v.a. contínua

■ A estatística Komolgorov-Smirnov é definida como:

$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F_0(x)|$$



■ A hipótese H_0 é rejeitada para um dado nível de significância α se:

$$D_n > d_{n,\alpha}$$

Teste CDF v.a. contínua

- A vantagem da estatística D_n é que não é preciso fazer nenhuma aproximação, ela é exata e só depende de n , não depende de $F_0(x)$.
- Já a estatística Q usada no teste para v.a. discretas (Chi-square test) é uma aproximação de uma v.a. Chi-square e é preciso um conjunto grande de amostras para que a aproximação seja boa.
- Exemplo 10.42, livro do Trivedi, pag., 718