

Teoria dos Grafos

Aula 7

Aula passada

- Implementação BFS
- DFS, implementação
- Complexidade
- Aplicações

Aula de hoje

- Classe de funções e notação O , Ω , Θ
- Propriedades da notação
- Funções usuais
- Tempo de execução

Comparando Quantidades



Como comparar quantidades?

- sem considerar detalhes, comparação aproximada

Ordem de grandeza

- Ordem de grandeza é a parte inteira de $\log_{10} x$, onde x é a quantidade
- Muito usada na academia (físicos, etc)

Ordem de Grandeza

- Número de pessoas no planeta? $\sim 10^{10}$
- Número de páginas web? $\sim 10^{11}$
- PIB dos EUA? $\sim 10^{13}$ dólares
- Peso de uma célula humana? $\sim 10^{-12}$ Kg
- Massa de Saturno é duas ordens de grandeza maior do que a Terra

Escala poderosa (potência de 10)

- Fácil comparação entre quantidades (grandes e pequenas)

Comparando Crescimento



Como comparar crescimento?

- sem considerar detalhes, comparação aproximada

Classe de funções

- Notação O , Ω , Θ
- Muito usada na Computação (e algumas outras áreas)

Comparando Crescimento



- Idéia: capturar o quão rápido (ou devagar) uma quantidade cresce

Tipos de crescimento?

- Linear, quadrático, logarítmico, exponencial, polinomial, etc.

Como formalizar este conceito?

Comparando Crescimento

- Seja $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 10x + 10$, $x > 0$

Qual cresce mais rápido?

- Comparação para valores grandes de x
- Seja $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 10x^2 + 10$, $x > 0$

Qual cresce mais rápido?

- Comparação de primeira ordem, crescimento igual

Notação O

- Seja $f(n)$ uma função positiva, $n > 0$
- Dizemos que $f(n)$ é O de $g(n)$ se $f(n)$ é *limitada superiormente* por uma constante vezes $g(n)$ para todo n grande suficiente
- Ou seja, se existe constante $c > 0$, $n_0 > 0$, tal que para todo $n > n_0$, $f(n) \leq c g(n)$
- Dizemos neste caso que “ $f(n)$ é $O(g(n))$ ” ou “ $f(n) = O(g(n))$ ” ou “ $f(n)$ pertence a $O(g(n))$ ”
- Importante: c não pode depender de n

Notação O

- $O(g(n))$ define uma classe de funções

Qual classe?

- Todas as funções “menores ou iguais” a $g(n)$
- Todas as funções $f(n)$ tal que exista $c > 0$ e $n_0 > 0$, tal que para todo $n > n_0$
 $f(n) \leq c g(n)$
- *Limitante superior assintótico* para $f(n)$

Exemplos

- Seja $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$, para $n > 0$
- $f(n)$ é $O(n^2)$?
- $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$
 $< 7n^2 + 10n^2 + 2n^2$
 $= 19n^2$
- Com $c = 19$, $n_0 = 1$, temos que $f(n) \leq c n^2$
para todo $n > n_0$
- $f(n)$ é $O(n^3)$?
- $f(n)$ é $O(n)$?

Notação Ω

- Complementar a notação O
 - limitante inferior assintótico
- Seja $f(n)$ uma função positiva, $n > 0$
- Dizemos que $f(n)$ é omega de $g(n)$ se $f(n)$ é ao menos uma constante vezes $g(n)$ para todo n grande suficiente
- Ou seja, se existe constante $c > 0$, $n_0 > 0$, tal que para todo $n > n_0$, $f(n) \geq c g(n)$
- Importante: c não pode depender de n

Notação Ω

- $\Omega(g(n))$ define uma classe de funções

Qual classe?

- Todas as funções “maiores ou iguais” a $g(n)$
- Todas as funções $f(n)$ tal que exista $c > 0$ e $n_0 > 0$, tal que para todo $n > n_0$
 $f(n) \geq c g(n)$
- *Limitante inferior assintótico* para $f(n)$

Exemplos

- Seja $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$, para $n > 0$
- $f(n)$ é $\Omega(n^2)$?
- $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$
 $> 7n^2$
- Com $c = 7$, $n_0 = 1$, temos que $f(n) \geq c n^2$
para todo $n > n_0$
- $f(n)$ é $\Omega(n^3)$?
- $f(n)$ é $\Omega(n)$?

Notação Θ

- Captura crescimento exato
 - limitante superior e inferior, simultaneamente
- Seja $f(n)$ uma função positiva, $n > 0$
- Dizemos que $f(n)$ é $\Theta(g(n))$
se $f(n)$ é cresce igual a $g(n)$ ao menos de
uma constante multiplicativa para todo n
grande suficiente
- Ou seja, se $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$,
com duas constantes c_1 e c_2 , e dois n_1 e n_2

Notação Θ

- $\Theta(g(n))$ define uma classe de funções

Qual classe?

- Todas as funções “iguais” a $g(n)$
- Todas as funções $f(n)$, tal que $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$
- *Limitante assintótico apertado* (tight bound) para $f(n)$

Exemplos

- Seja $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$, para $n > 0$
- $f(n)$ é $\Theta(n^2)$?
- Sim, pois $f(n) = O(n^2)$ e $f(n) = \Omega(n^2)$
- $f(n)$ é $\Theta(n^3)$?
- $f(n)$ é $\Theta(n)$?

Limite e Notação Θ

- Notação Θ pode ser calculada como limite
- Seja $f(n)$ e $g(n)$ duas funções positivas

■ Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$$

- Então $f(n) = \Theta(g(n))$
- Definição de limite atende as definições de O e Ω para as funções

Propriedades de O , Ω , Θ

- Considere as funções positivas $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$
- Transitividade
- Se $f = O(g)$ e $g = O(h)$, então $f = O(h)$
- Se $f = \Omega(g)$ e $g = \Omega(h)$, então $f = \Omega(h)$
- Se $f = \Theta(g)$ e $g = \Theta(h)$, então $f = \Theta(h)$
- Provar estas propriedades
 - duas primeiras implicam a terceira

Propriedades de O , Ω , Θ

- Considere as funções positivas $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$
- Soma de funções
- Se $f = O(h)$ e $g = O(h)$, então $f + g = O(h)$
- Vale também para número fixo de parcelas de funções
- Se $f = O(g)$ então $f + g = \Theta(g)$
 - Provar este resultado interessante

Polinômios

- Considere o polinômio

$$f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_0$$

- Crescimento assintótico dado pelo termo de mais alta ordem (que determina seu grau)
- Temos que $f(n) = O(n^d)$
- Temos ainda que $f(n) = \Omega(n^d)$
- Prova desta propriedade?

Logaritmo

- Lembrando $\log_b n$ é o número x , tal que $b^x = n$
- Logaritmo cresce muito devagar
 - \log (número de átomos no universo) ~ 60
- Mais devagar do que qualquer polinômio
- Para todo $b > 1$ e qualquer $x > 0$, temos $\log_b n = O(n^x)$
- Não precisa informar a base em $O(\log n)$
 - mudança de base é multiplicação por constante

Exponencial

- Lembrando $f(n) = r^n$ com $r > 1$
- Crescem muito rápido
 - expoente é n (e não fixo, como polinômio)
- Mais rápido do que qualquer polinômio
- Para todo $r > 1$ e todo $d > 0$, temos $n^d = O(r^n)$
- Diferente de logaritmo, cada exponencial (base) define sua família
- Seja $r > s > 1$
- Então nunca é o caso de $r^n = \Theta(s^n)$
 - Prova?

Tempo de Execução

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1,000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10,000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100,000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1,000,000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

- n é o tamanho da entrada
 - número de “elementos” na entrada
- Tempo de execução típico em função de n para diferentes funções de crescimento

Tempo de Execução Típico

- Logarítmico, $O(\log n)$
 - encontrar um valor em um vetor ordenado (busca binária)
 - percorrer uma árvore balanceada
- Linear, $O(n)$
 - calcular valor máximo em um vetor
 - imprimir valores de uma lista
 - BFS, DFS (onde n aqui é vértices + arestas)
- $O(n \log n)$
 - ordenar um vetor com merge-sort
 - Dijkstra

Tempo de Execução Típico

- Quadrático, $O(n^2)$
 - Ordenação com quicksort (pior caso)
 - Encontrar o par de pontos mais próximos
 - Dijkstra (sem heap)
- Cúbico, $O(n^3)$
 - multiplicação de matrizes
- Exponencial, $O(r^n)$
 - TSP, problema do caixeiro viajante
 - muitos outros em grafos