Modelagem e Análise de Sistemas - COS767

Aula passada

Introdução à simulação

Geração de números aleatórios

Lei dos Grandes Números

Geração de V.A.: Transformada Inversa

Aula de hoje

Geração de variáveis aleatórias: Acceptance-Rejection Method

Algoritmo para simular uma fila

Medidas de interesse

Acceptance-Rejection Method

- Seja Y v.a. com pmf $q_Y(y)$ e X v.a. com pmf $p_X(x)$
- Suponha que exista um método para gerar Y
- Considere c uma constante tal que:

$$\frac{p_X(y)}{q_Y(y)} \leqslant c \text{ , } para\ todo\ y$$

Acceptance-Rejection Method

- É possível gerar X a partir de Y.
- A probabilidade de uma amostra de Y ser aceita como amostra de X é dada por: $\dfrac{p_X(y)}{c\,q_Y(y)} \leqslant 1$
- Algoritmo:
  - Gerar uma amostra y de Y com pmf $q_y(y)$
  - Gerar U v.a. Uniforme (0,1)
  - Se U ≤ $\dfrac{p_X(y)}{c\,q_Y(y)}$ então x=y (y é aceito como amostra de X)

    senão gerar outra amostra de Y.

Acceptance-Rejection Method

- Prova:

$$P[X=i]=P[Y=i/U\leq(p_X(i)/cq_Y(i))],$$

$$P[X=i]=P[Y=i, U\leq p_X(i)/cq_Y(i)]/K,$$

$$P[X=i]=P[Y=i]P[U\leq p_X(i)/cq_Y(i)]/K,$$

pois Y e U são v.a. independentes

$$P[X=i]=[q_Y(i)\,p_X(i)/cq_Y(i)]/K,$$

pois U é v.a. Uniforme (0,1)

$$P[X=i]=p_X(i)/cK,$$

$$onde\; K=P[U\leq p_X(i)/cq_Y(i)]$$

K é a probabilidade de uma amostra ser aceita

$$somando\;\; para\, todo\, i\,, temos$$

$$1=1/(cK), logo\, K=1/c\; como\, esperado$$

Acceptance-Rejection Method

- Cada iteração do algoritmo resulta em um valor aceito com P[aceito] = K = 1/c.
- O número de iterações necessárias é uma v.a. Geométrica com parâmetro 1/c e média c.
- O algoritmo torna-se mais eficiente quanto menor for o valor de c.

Exemplo acceptance-rejection method

- Gerar uma v.a. Normal ($\mu=0,\sigma^2=1$) a partir de uma v.a. Exponencial ($\lambda=1$)
- Primeiro passo:
- Cálculo da constante c :

$$c \geq f_X(x)/g_Y(x), onde$$
$$f_X(x)=(2/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}e$$
$$g_Y(x)=e^{-\lambda x} logo,$$
$$c=\sqrt{2e/\pi}$$

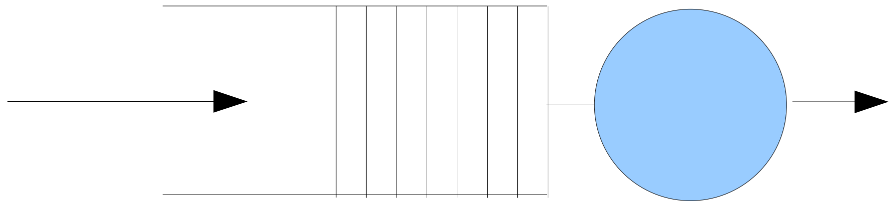
Exemplo acceptance-rejection method

- Algoritmo:
- Gerar v.a. exponencial y, v.a. uniforme(0,1) u_1 e u_2
- Se $u_1 \leq e^{-(y-1)^2/2}$
  - Então Se $u_2 > 0.5$
    - Então x=y
    - Senão x=-y
  - Senão volta para o passo inicial

Simulação

- O que é uma simulação?
  - realização da evolução de um sistema estocástico no tempo
- Como caracterizar o sistema em um instante de tempo?
  - através de seu estado
- Como construir um simulador?
  - programa que "acompanha" evolução do estado do sistema no tempo

Tempo Médio na Fila

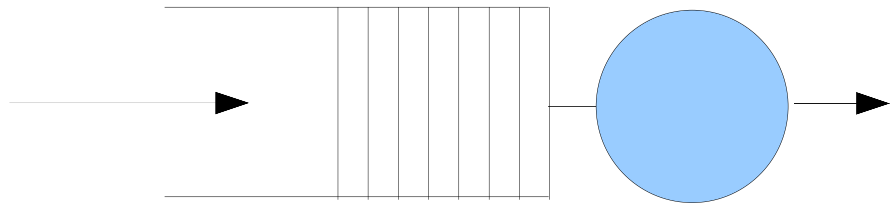


- Como obter tempo médio na fila ***via simulação***?
- Tempo médio na fila:
  - tempo desde o instante de chegada até o instante de saída
  - W_i : tempo de espera do *i*-ésimo elemento a chegar na fila (v.a.)

Estimativa

$$\overline{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Fila - Parâmetros

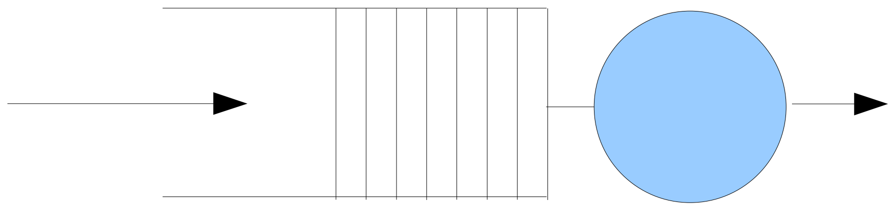


- O que precisamos saber para simular uma fila?
  - Processo de chegada
  - Tempo de serviço
  - Capacidade da fila
  - Política de atendimento
  - Parâmetros das v.a.
    - ex. Poisson (taxa)

aleatório

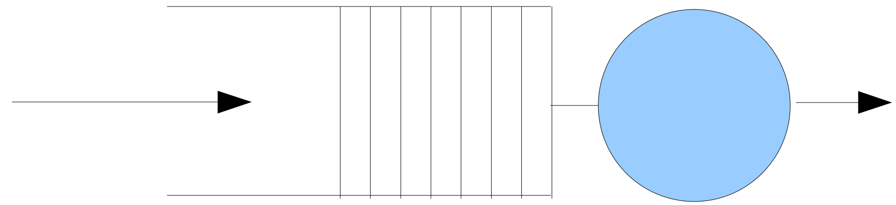
determinístico

Fila - Estado



- Qual o estado do sistema?
  - número de elementos na fila
- Estado evolui (muda) em instantes discretos no tempo
- Em que instantes?
  - instante de chegada e instante de saída

Fila - Eventos



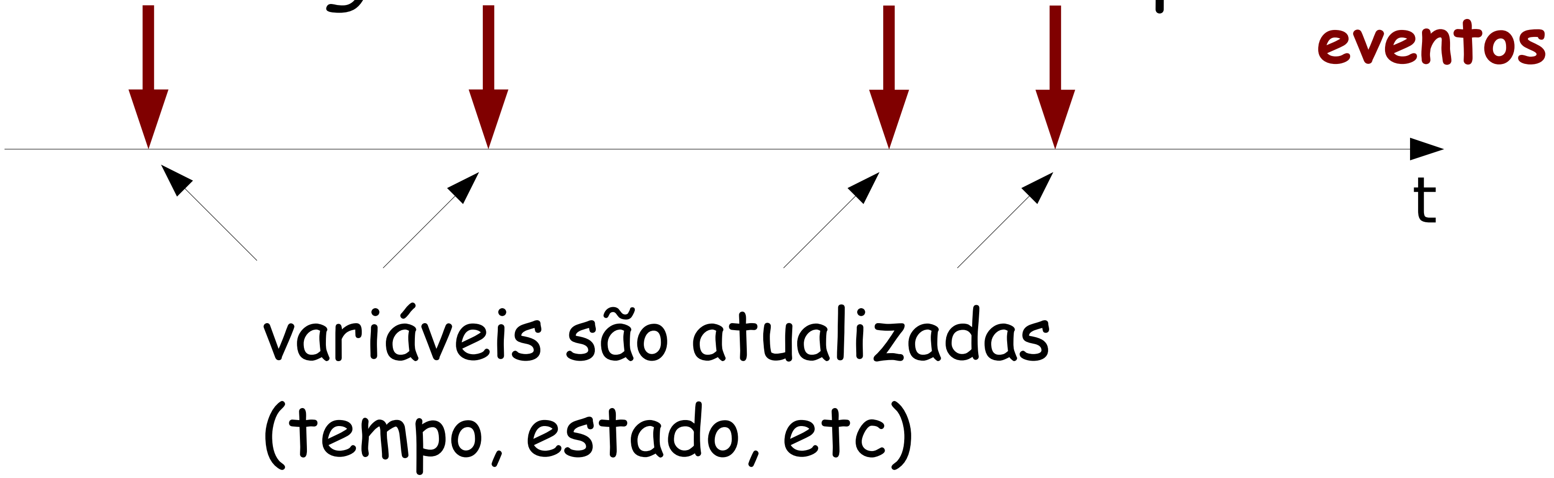
- Ações que modificam o estado do sistema
- Dois eventos: chegada e saída
  - O que ocorre em cada um destes eventos?
- Chegada
  - anotar o instante de chegada do elemento
  - incrementar a fila
- Saída
  - anotar instante de saída do elemento
  - decrementar a fila
- Quando atualizar o tempo?
- Quando gerar próxima chegada ou saída?

Simulação – Variáveis

- Variáveis
  - ***t***: representa o instante de tempo que o simulador se encontra
  - **variáveis de estado**: representam o estado do sistema no tempo *t*
  - **variáveis de interesse**: representam valores que permitem o cálculo de medidas de interesse

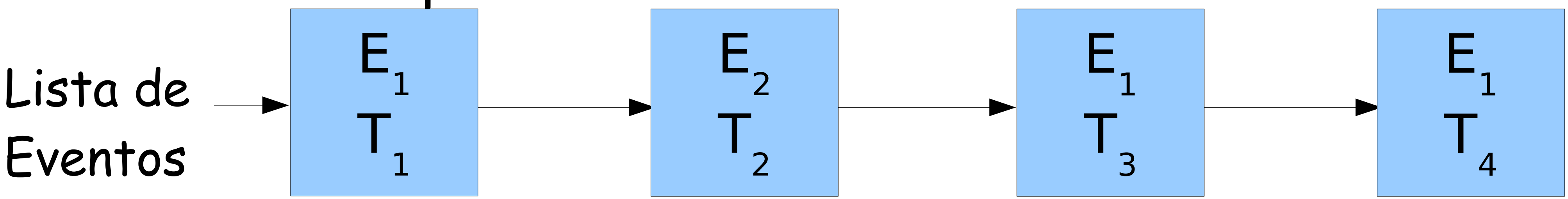
Simulação - Eventos

- Eventos
  - ações que modificam o estado do sistema
- Ao ocorrer um evento
  - variáveis são atualizadas (tempo, estado do sistema, medidas de interesse)
- Permite *seguir* o modelo no tempo



Lista de Eventos

- Lista contendo todos os eventos que irão ocorrer no futuro
  - tipo de evento, instante de ocorrência do evento
  - ordenada por ordem de ocorrência



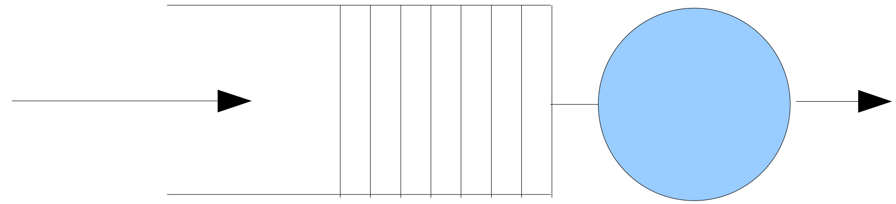
- Simulador processa próximo evento da lista
  - remove evento da lista
- Quando adicionar eventos na lista?
  - **ao processar um evento!**

Simulador Genérico

1. Inicializar variáveis
2. Inserir um ou mais eventos na lista de eventos
3. Enquanto não chegar ao fim da simulação
   4. Remover próximo evento da lista de eventos
   5. Processar evento

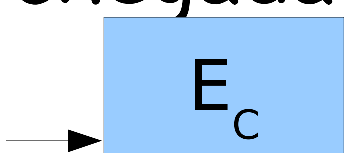
- Definir estado inicial
- Dá início a simulação
- Condição para terminar simulação (ex. $t > t_{max}$)
- Diminui lista de eventos
- Atualiza variáveis, gera eventos, gera outras informações

Simulação da Fila

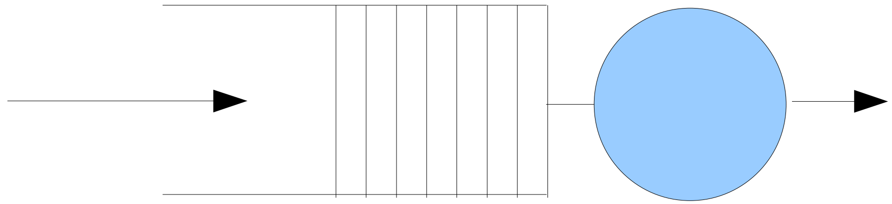


- Estado: N (número de elementos no sistema)
- Eventos: E_C, E_S (chegada e saída)
- Tempo: t
- Condição de parada: $t > t_{max}$
- Estado inicial: fila vazia ($N = 0$)
- *Início*: chegada no instante 0 (E_C, 0)

Lista de Eventos



Simulação da Fila



- Calcular tempo médio na fila
- W_i : tempo na fila do *i*-ésimo elemento
- Outras variáveis
  - N_c : número total de chegadas até o momento
  - N_s : número total de saídas até o momento
  - $C(i)$: instante de chegada do *i*-ésimo elemento
  - $S(i)$: instante de saída do *i*-ésimo elemento
- $W_i = S(i) - C(i)$

Inicialização

1. $t = 0$
2. $N = 0$
3. $N_c = 0$
4. $N_s = 0$
5. Adicionar evento $(E_c, 0)$

Evento de Chegada

1. $t = t_E$ // t_E = tempo de ocorrência do evento
2. $N = N + 1$
3. $N_C = N_C + 1$
4. $C(N_C) = t$
5. Gerar $x \sim F_X(x)$ // tempo até próxima chegada
6. Adicionar evento $(E_C, t+x)$
7. Se $(N = 1)$ // fila estava vazia
8. Gerar $y \sim F_S(y)$ // tempo de serviço
9. Adicionar evento $(E_S, t+y)$

Evento de Saída

1. $t = t_E$
2. $N = N - 1$
3. $N_S = N_S + 1$
4. $S(N_S) = t$
5. Se $(N > 0)$ // fila não está vazia
6. Gerar $y \sim F_S(y)$ // tempo de serviço
7. Adicionar evento $(E_S, t+y)$

Medida de Interesse

- $S(i) - C(i)$: tempo de espera do i-ésimo elemento a chegar (sair) na fila

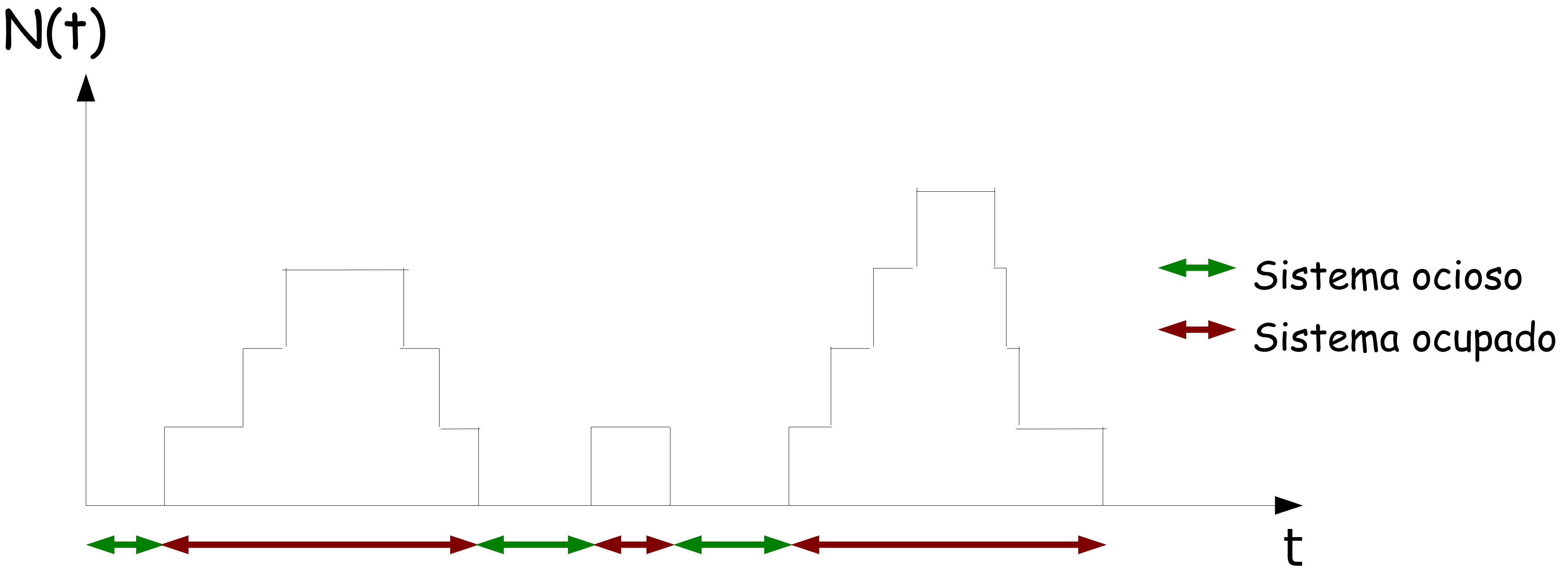
$$\overline{W} = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} S(i) - C(i)$$

Uma estimativa do tempo médio na fila

Medidas de Interesse

- Utilização (fração de tempo servindo)
- Tempo médio na fila
- Número médio na fila
- Fração de elementos descartados (fila finita)
- Fração de tempo que a fila possui mais do que *k* elementos

Utilização



Utilização: fração de tempo que o sistema está ocupado

- Medir os tempos ocioso e ocupado

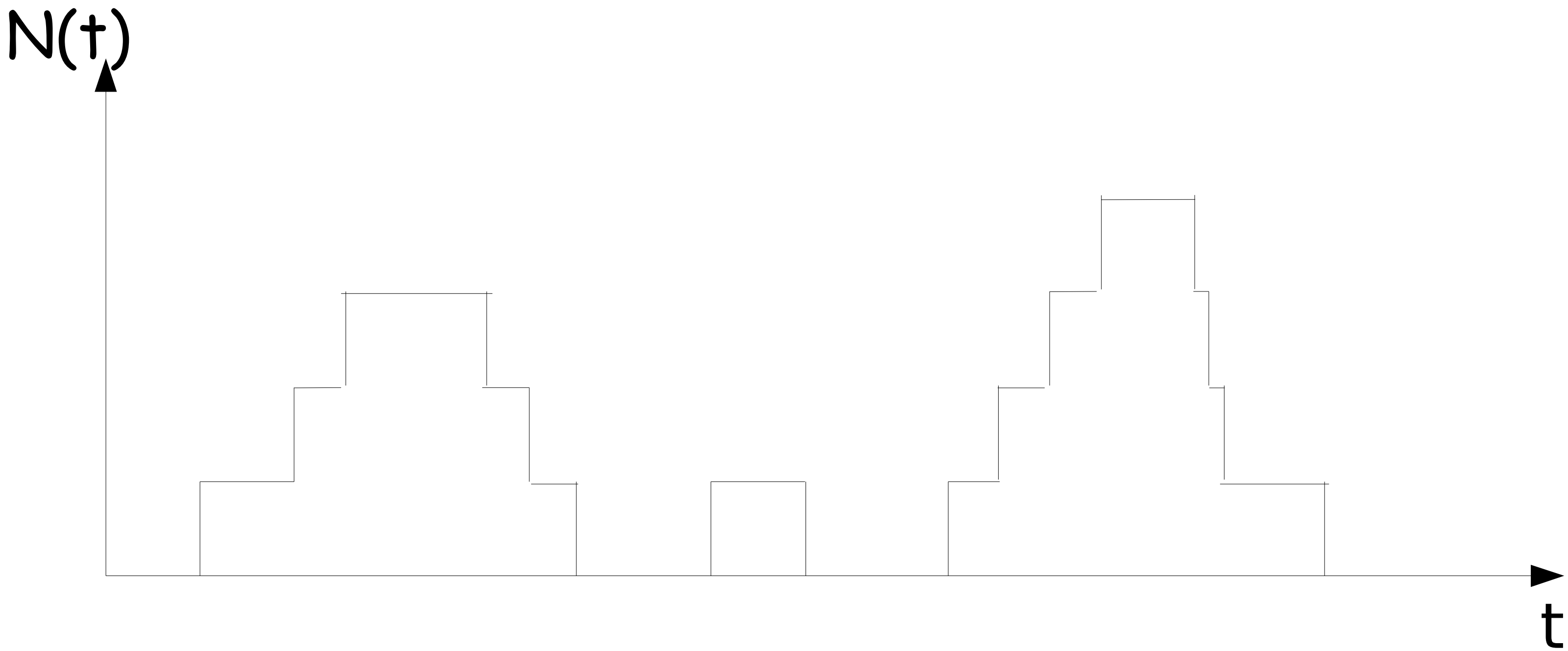
Tempo médio na fila

- S(i) – C(i) : tempo em fila do i-ésimo elemento a chegar na fila

$$\overline{W} = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} S(i) - C(i)$$

Uma estimativa do tempo médio na fila

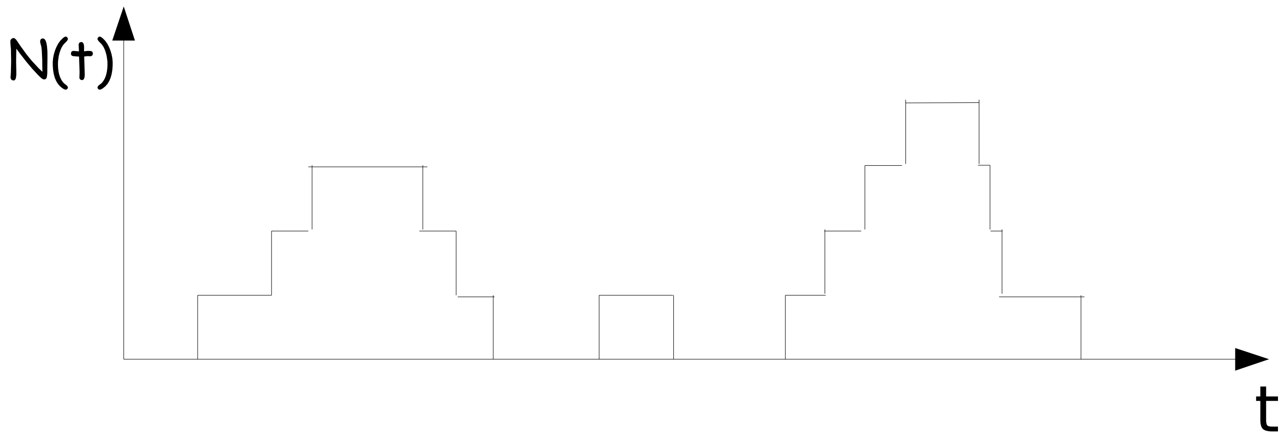
Número médio na fila



- Como medir E[N] (até certo T grande)?

$$E[N] = \frac{\int_T N(t)\,dt}{T}$$

Número médio na fila



- T_i : tempo que o sistema passa com *i* elementos

- T : tempo total $\longrightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty} T_i = T$

$$E[N] = 1/T \sum_{i=0}^{\infty} i\, T_i = 1/T \int_{t=0}^{t=T} N(t)\, dt$$

Fração de elementos descartados

- N_d : número de elementos que chegam e encontram a fila cheia

- N_c : número total de chegadas até o momento

- $F_{descarte}$: N_d / N_c